Marcus du Sautoy, *La Symphonie des nombres premiers*, Éditions Héloïse d'Ormesson, 2005.

1
Qui veut gagner des millions ?

« Nous avons la séquence des nombres ? D'accord, allez, on peut la réciter de tête… cinquante-neuf, soixante et un, soixante-sept… soixante et onze… Ça ne seraient pas tous des nombres premiers ? » Dans la salle de contrôle, l'excitation fut soudain palpable. Même les traits d'Ellie trahirent un instant le fait qu'elle ressentait les choses plus profondément, mais presque immédiatement, elle retrouva son sérieux, par peur de se laisser emporter, de passer pour une idiote en se montrant peu scientifique. » Carl Sagan, *Contact*

La matinée était chaude et humide en ce mois d'août 1900, quand David Hilbert, de l'Université de Göttingen, prit la parole à l'occasion du Congrès international des mathématiciens dans un amphithéâtre bondé à la Sorbonne. Déjà reconnu comme l'un des plus grands mathématiciens de son temps, Hilbert avait préparé un discours des plus osés. Plutôt que de revenir sur ce qui avait été démontré, il se disposait à parler de l'inconnu. C'était aller à l'encontre des conventions. Sa voix trahissait sa nervosité quand il entreprit devant l'assistance de dévoiler sa vision de l'avenir des mathématiques. « Qui d'entre nous ne serait heureux de lever le voile qui nous masque l'avenir, de poser le regard sur les prochaines avancées de notre science et sur les secrets de son développement dans les siècles futurs ? » En guise d'hommage au siècle nouveau, Hilbert lança un défi à son public en dressant la liste de vingt-trois problèmes qui, estimait-il, serviraient de cap aux explorateurs mathématiques du xx^e siècle.

Nombre de ces problèmes furent effectivement résolus dans les décennies qui suivirent, et ceux qui en découvrirent les solutions font partie de cet illustre cortège de mathématiciens surnommé « la classe d'honneur ». On y trouve des gens du calibre de Kurt Gödel et Henri Poincaré ainsi que d'autres pionniers dont les idées ont métamorphosé le paysage mathématique. Mais un problème semblait voué à ne jamais trouver son maître. Il s'agissait du huitième sur la liste de Hilbert : l'Hypothèse de Riemann.

De tous les défis lancés par Hilbert, le huitième occupait une place à part dans son cœur. En Allemagne, Frédéric Barberousse, empereur chéri de son peuple mort au cours de la Troisième Croisade, est à la source d'un mythe. La légende veut qu'il soit toujours en vie, endormi dans une caverne dans les Monts Kyffhäuser, et qu'il s'éveillera quand l'Allemagne aura besoin de lui. On raconte que quelqu'un aurait demandé à Hilbert : « Si vous vous réveilliez comme Barberousse, au bout de cinq siècles, que feriez-vous ? » Et lui de répondre : « Je demanderais si l'on a réussi à démontrer l'Hypothèse de Riemann. »

À la fin du xx^e siècle, la plupart des mathématiciens s'étaient résignés à l'idée que ce joyau entre tous les problèmes de Hilbert risquait fort d'entrer inviolé dans le siècle suivant, et qu'il serait peut-être toujours un mystère quand Hilbert lui-même s'éveillerait de son sommeil de cinq cents ans. Si ce dernier avait stupéfié le premier Congrès international du xx^e siècle par son discours révolutionnaire si riche en inconnues, une surprise attendait les mathématiciens qui comptaient assister au dernier Congrès du siècle.

Le 7 avril 1997, une nouvelle incroyable apparut sur les écrans des ordinateurs du monde mathématique. Sur le site Web du Congrès international des mathématiciens, qui devait se tenir l'année suivante à Berlin, il était annoncé que le Saint Graal des maths avait enfin été découvert. Quelqu'un avait réussi à démontrer l'Hypothèse de Riemann. La nouvelle allait avoir des répercussions profondes. L'Hypothèse de Riemann est en effet au cœur de tout l'édifice mathématique. À la lecture du mail, les mathématiciens furent soulevés d'enthousiasme. Ils étaient peut-être sur le point de comprendre l'un des plus grands mystères de leur art.

L'auteur de la lettre faisant part de cet événement était le professeur Enrico Bombieri. On ne pouvait rêver meilleure source, ni plus respectée. Bombieri est l'un des gardiens du temple de l'Hypothèse de Riemann. Il officie au prestigieux Institut des Études Avancées de Princeton (IAS), autrefois l'antre d'Einstein et de Gödel. Il fait peu parler de lui, mais les mathématiciens l'écoutent toujours d'une oreille attentive.

Bombieri a grandi en Italie, où les vignobles prospères de sa famille lui ont donné le goût des bonnes choses. Ses collègues le surnomment affectueusement « l'Aristocrate des maths ». Dans sa jeunesse, on ne manquait jamais de le remarquer lors des conférences en Europe, auxquelles il se rendait souvent au volant d'une voiture de sport à la mode. La rumeur disait qu'il avait fini sixième d'un rallye de vingt-quatre heures en Italie, rumeur qu'il prenait un malin plaisir à alimenter. Toutefois, il avait remporté des succès plus concrets sur le circuit mathématique, qui lui valurent d'être invité à Princeton dans les années 1970. Il y travaille encore aujourd'hui, et s'intéresse désormais à la peinture, en particulier aux portraits, plutôt qu'à la course automobile.

Mais sa véritable passion, c'est la créativité dans le domaine des mathématiques, surtout le défi que représente l'Hypothèse de Riemann. Cette dernière l'obsède depuis qu'il l'a découverte au fil de ses lectures, à l'âge précoce de quinze ans. Il avait toujours été fasciné par les propriétés des nombres, dont il avait pris conscience en feuilletant les livres de mathématiques que son père, un économiste, avait rassemblés dans son impressionnante bibliothèque. L'Hypothèse de Riemann, avait-il appris, était considérée comme le problème le plus complexe et le plus fondamental de la théorie des nombres. Quand son père, tentant désespérément d'empêcher Enrico de conduire sa Ferrari, lui offrit de lui en acheter une si jamais il parvenait à résoudre l'énigme, sa passion s'en trouva décuplée.

Dans son mail, Bombieri disait avoir été coiffé sur le poteau. « La conférence donnée par Alain Connes à l'IAS mercredi dernier a eu des développements extraordinaires », commençait-il. Des années plus tôt, le monde des maths s'était enflammé quand il avait été annoncé qu'Alain Connes s'était attelé à la tâche de résoudre l'Hypothèse de Riemann. Connes est l'un des révolutionnaires du milieu, sorte de Robespierre inoffensif dans un univers où Bombieri jouerait les Louis XVI. Personnage d'un formidable charisme, son style flamboyant est très éloigné de l'image du matheux emprunté et rétif au changement. Animé de la force du fanatique convaincu par la valeur de sa vision du monde, ses conférences sont fascinantes. Ses partisans lui vouent littéralement un culte, et ils n'hésiteront jamais à le rejoindre sur les barricades mathématiques pour défendre leur héros face à toute contre-offensive déclenchée depuis les positions immuables de l'*Ancien Régime*[1].

Connes travaille dans l'enceinte de ce que la France a créé pour répondre à l'Institut de Princeton, à savoir l'Institut des Hautes Études Scientifiques de Paris. Depuis son arrivée en 1979, il a développé un langage entièrement nouveau pour comprendre la géométrie. Il ne craint pas de pousser le sujet jusqu'aux limites extrêmes de l'abstraction. Et la révolution abstraite qu'il propose en a fait ciller plus d'un dans les rangs de ses pairs, pourtant habitués au caractère fortement conceptuel de leur vision du monde. Son nouveau langage, comme il en a fait la démonstration à ceux qui doutent de la nécessité d'une théorie d'une sécheresse aussi brute, détient plusieurs clés de l'univers, bien réel, de la physique quantique. Et s'il a fait souffler un vent de terreur sur les masses mathématiques, eh bien, qu'il en soit ainsi.

Quand Connes a eu la témérité d'affirmer que sa nouvelle géométrie pourrait non seulement permettre de dévoiler les rouages de la physique quantique, mais qu'elle serait également en mesure d'expliquer l'Hypothèse de Riemann, ce mystère incomparable des nombres, il a suscité surprise et même stupeur. Qu'il ose s'aventurer au cœur de la théorie des nombres pour s'attaquer de front au problème le plus manifestement difficile des mathématiques prouve à quel point il n'a que mépris pour les barrières de la convention. Depuis son irruption sur la scène, vers le milieu des années 1990, il flotte dans l'air comme un parfum d'anticipation : si quelqu'un a les moyens de faire plier cette énigme réputée insoluble, c'est bien Alain Connes.

Et pourtant ce n'était pas lui qui semblait avoir trouvé la pièce manquante de ce puzzle complexe. Dans sa lettre, Bombieri expliquait ensuite qu'un jeune physicien, assistant à la conférence de Connes, avait « eu un flash », et avait compris comment adapter le monde étrange des « systèmes fermioniques-bosoniques supersymétriques » à la résolution de l'Hypothèse de Riemann. Rares étaient les mathématiciens à être vraiment sûrs de savoir ce que voulait dire ce salmigondis de termes retentissants, mais Bombieri assurait qu'ils dépeignaient « la physique qui correspond à un ensemble proche du zéro absolu, mixture d'anions et de morons en révolution opposée. » Ce qui n'était guère plus limpide, mais après tout, on avait affaire là à la solution du problème le plus difficile de toute l'histoire des mathématiques. Par conséquent, personne ne s'attendait à ce que ce soit aisément abordable. À en croire Bombieri, au bout de six jours de travail ininterrompu, et avec l'aide d'un nouveau langage informatique, le Mispar, le jeune physicien avait enfin réussi à démêler l'énigme la plus insondable des mathématiques.

Et il concluait son mail par ces mots : « Bon sang ! Merci de faire circuler le plus possible. » Il pouvait certes paraître extraordinaire qu'un jeune physicien ait fini par démontrer l'Hypothèse de Riemann, mais cela n'avait en réalité rien de très surprenant. Ces dernières décennies, la physique était bien souvent venue au secours des maths. Quoi qu'étant au cœur de la théorie des nombres, l'Hypothèse de Riemann montrait depuis quelque temps qu'elle entretenait des liens inattendus avec les problèmes de physique des particules.

Les mathématiciens envisageaient déjà de bouleverser leurs projets de voyage pour se rendre à Princeton afin de vivre ce moment historique. Nul n'avait oublié l'enthousiasme qui s'était emparé de la communauté quand, en juin 1993, Andrew Wiles, un mathématicien anglais, avait annoncé avoir prouvé le Dernier Théorème de Fermat lors d'une conférence à Cambridge. Wiles avait démontré que Fermat avait eu raison d'affirmer que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'avait pas de solution quand n était plus grand que 2. Quand, à la fin de sa présentation, Wiles avait reposé sa craie, les bouchons de champagne avaient commencé à sauter et les flashs à crépiter.

Mais les mathématiciens le savaient. La résolution de l'Hypothèse de Riemann aurait un impact nettement plus sensible pour l'avenir de leur science que le fait de savoir que l'équation de Fermat n'avait pas de solution. Comme Bombieri l'avait compris à l'âge encore tendre de quinze ans, l'Hypothèse de Riemann vise à comprendre les objets les plus fondamentaux des mathématiques : les nombres premiers.

Les nombres premiers sont les atomes mêmes de l'arithmétique. Ce sont les nombres indivisibles, qu'il est impossible de décomposer sous la forme d'une multiplication de deux nombres plus petits. 13 et 17 sont des premiers, ce qui n'est pas le cas de 15, que l'on peut également écrire en tant que 3 fois 5. Ils sont les pierres précieuses enchâssées dans l'immense étendue de l'univers infini des nombres, que les mathématiciens explorent depuis des siècles. Ils sont pour eux une source d'émerveillement : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23… nombres hors du temps qui existent dans un monde indépendant de notre réalité physique. Pour le mathématicien, ils sont un don de la Nature.

Leur importance s'explique par leur capacité à bâtir tous les autres nombres. Tout nombre qui n'est pas premier peut être obtenu en multipliant les unes par les autres ces briques premières. Chaque molécule du monde physique peut être fabriquée à partir d'atomes prélevés dans le tableau périodique des éléments chimiques. Pour le mathématicien, une liste de nombres premiers est comme ce tableau périodique où les nombres 2, 3 et 5 correspondraient à l'hydrogène, à l'hélium et au lithium. La maîtrise de ces briques lui permet d'espérer découvrir de nouvelles façons d'établir un cap pour parcourir la complexe grandeur du monde mathématique.

Pourtant, en dépit de leur apparente simplicité et de leur caractère fondamental, les nombres premiers restent les objets les plus mystérieux qu'étudient les mathématiciens. Dans un domaine consacré à la quête de schémas et d'ordre, ils incarnent le défi absolu. Il suffit de consulter une liste de nombres premiers pour s'apercevoir qu'il est impossible de prédire l'apparition du suivant. La liste semble chaotique, aléatoire, et ne donne aucune clé permettant de déterminer le prochain. Si la liste des nombres premiers est l'électrocardiogramme des maths, alors c'est un cœur qui bat sous l'influence d'un puissant cocktail à la caféine :

Les nombres premiers jusqu'à 100 : le pouls irrégulier des mathématiques

Peut-on trouver une formule capable de générer les nombres de cette liste, une règle magique qui donne le centième nombre premier ? Cette question a hanté les esprits mathématiques tout au long de l'Histoire. Au bout de deux mille ans d'efforts, ces nombres continuent apparemment de résister à toute tentative de les intégrer à un schéma précis. Des générations se sont succédées, écoutant le rythme du tambour premier battant sa succession de nombres : deux battements, puis trois, cinq, sept, onze. Plus le battement se poursuit, plus il devient facile de croire en la responsabilité d'un bruit blanc aléatoire, sans logique interne. Au cœur des mathématiques, cette science de l'ordre, tout ce que les mathématiciens pouvaient entendre, c'était le chaos.

Or ils ne peuvent envisager d'admettre qu'il n'y a pas d'explication à la façon dont la Nature a sélectionné les nombres premiers. S'il n'existait pas de structure dans les mathématiques, pas de magnifique simplicité, elles ne vaudraient pas la peine d'être étudiées. Jamais l'écoute du bruit blanc n'a été considérée comme un passe-temps digne d'intérêt. Comme l'écrivait le mathématicien français Henri Poincaré : « Le scientifique n'étudie pas la Nature parce qu'elle est utile ; il l'étudie parce qu'elle le réjouit. Et elle le réjouit parce qu'elle est belle. Si la Nature n'était pas belle, elle ne vaudrait pas la peine d'être connue, et si la Nature ne valait pas la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue. »

Mais peut-être le pouls des nombres premiers se stabilise-t-il après un départ hoquetant ? Pas du tout. Plus les nombres sont élevés, plus les choses semblent empirer. Voici les nombres premiers recensés parmi les cent nombres en dessous et au-dessus de 10 000 000. En dessous, pour commencer :

9 999 901   9 999 907   9 999 929   9 999 931
9 999 937   9 999 943   9 999 971   9 999 973
9 999 991

Voyez maintenant à quel point ils sont rares au-delà de 10 000 000 :

10 000 019   10 000 079.

Difficile de concocter une formule capable d'accoucher d'un tel schéma. En fait, ce défilé de nombres premiers ressemble à une succession aléatoire bien plus qu'à un tracé soigneusement ordonné. On peut lancer quatre-vingt-dix neuf fois de suite une pièce de monnaie, ce n'est pas pour cela que l'on saura sur quelle face elle retombera la centième fois. De même, les nombres premiers défient toute prédiction.

Pour les mathématiciens, ils constituent l'une des sources de tension les plus étranges de leur domaine. D'une part, un nombre ne peut être que premier ou non. Jamais un nombre ne deviendra soudain, sur quelque coup du hasard, divisible par un autre plus petit. D'autre part, on ne peut nier que la liste des nombres premiers tient d'une séquence aléatoire. Les physiciens se sont faits à l'idée qu'un dé quantique décide du sort de l'univers, qu'il choisit au jugé à chaque lancer où les scientifiques rencontreront de la matière. Mais il est un rien gênant de devoir admettre que ces nombres fondamentaux sur lesquels sont fondées les mathématiques sont manifestement régis de façon arbitraire par la Nature qui a décidé du destin de chaque nombre en laissant agir le hasard. Hasard et chaos, aux yeux du mathématicien, sont autant d'anathèmes.

En dépit de leur caractère aléatoire, les nombres premiers, plus que tout autre élément de notre patrimoine mathématique, ont une qualité universelle, hors du temps. Ils existeraient, que nous ayons ou non suffisamment évolué pour être à même de les identifier. Comme le disait le mathématicien de Cambridge G. H. Hardy dans son célèbre ouvrage, *A Mathematician's Apology*[2], « 317 est un nombre premier, non parce que nous le pensons, ou parce que nos esprits sont formés de telle ou telle façon, mais *parce que c'est ainsi*, parce que la réalité mathématique est ainsi faite. »

D'aucuns, parmi les philosophes, pourraient s'opposer à une vision si platonicienne du monde, cette foi en une réalité absolue et éternelle par-delà l'existence humaine, mais selon moi, c'est en cela qu'ils sont des philosophes, et non des mathématiciens. Dans *Matière à pensée*, on assiste à un dialogue fascinant entre Alain Connes, le mathématicien dont parlait Bombieri dans son mail, et le neurobiologiste Jean-Pierre Changeux. Dans ce livre, la tension est perceptible quand le mathématicien défend l'existence de son domaine en dehors de l'esprit, tandis que le neurobiologiste cherche à réfuter une telle idée. « Pourquoi ne verrions-nous pas π = 3,1416 écrit en lettres d'or dans le ciel, ou $6{,}02 \times 10^{23}$ apparaître dans les reflets d'une boule de cristal ? » Changeux s'avoue exaspéré par les déclarations de Connes, qui maintient qu'il « existe, indépendamment de l'esprit humain, une réalité mathématique, brute et immuable », et qu'au cœur du monde, nous trouvons l'éternelle liste des nombres premiers. Les mathématiques, poursuit Connes, « sont indubitablement le seul langage universel ». On peut imaginer une chimie ou une biologie différentes à l'autre bout de l'univers, mais les nombres premiers le resteront, quelle que soit la galaxie où on les comptera.

Dans le classique de Carl Sagan, *Contact,* les extraterrestres ont recours aux nombres premiers pour entrer en contact avec une intelligence terrestre. L'héroïne du roman, Ellie Arroway, travaille au Seti, le projet de recherche de la vie intelligente extraterrestre, et passe son temps à l'écoute des crachotements du cosmos. Une nuit, alors que les radiotélescopes sont braqués sur Véga, ils identifient soudain d'étranges pulsations au-dessus du bruit de fond. Ellie ne tarde pas à reconnaître le rythme de ce signal radio. Deux pulsations, suivies d'une pause, puis trois pulsations, cinq, sept, onze, et ainsi de suite, passant en revue tous les nombres premiers jusqu'à 907. Puis la séquence repart du début.

Ce tambour cosmique entonne une musique que des Terriens ne pouvaient manquer de comprendre. Ellie est convaincue que seule une vie intelligente a pu être à l'origine de ces pulsations : « Difficile d'imaginer que du plasma rayonnant puisse émettre une série régulière de signaux mathématiques comme ceux-ci. Les nombres premiers sont là pour attirer notre attention. » Si la culture extraterrestre avait transmis les numéros gagnants de la loterie locale sortis au cours des dix dernières années, Ellie n'aurait pas été en mesure de les distinguer du bruit ambiant. Même si la liste des nombres premiers semble aussi aléatoire que des numéros gagnants, sa constance universelle a déterminé le choix de chacun des nombres de l'émission venue d'ailleurs. C'est en cette structure qu'Ellie voit le signe d'une vie intelligente.

La communication par les nombres premiers n'est pas que de la science-fiction. Dans son livre, *L'Homme qui prenait sa femme pour un chapeau*, Oliver Sacks revient sur le cas de deux jumeaux de vingt-six ans, John et Michael, dont le mode de communication le plus élaboré était de s'échanger des nombres premiers à six chiffres. Sacks décrit le moment où il les a vus pour la première fois dialoguer par nombres dans le coin d'une pièce. « Au début, on aurait dit deux connaisseurs, deux taste-vin partageant des bouquets exceptionnels, en appréciant la rareté. » D'abord, Sacks ne comprend pas ce qu'ils font. Mais dès qu'il parvient à casser leur code, il mémorise quelques nombres premiers à huit chiffres qu'il glisse alors comme par inadvertance dans la conversation lorsqu'il les rencontre la fois suivante. Surpris, les jumeaux se plongent dans une profonde concentration, qui se mue en jubilation quand ils identifient de nouveaux nombres premiers. Mais si Sacks a dû utiliser une table de nombres premiers pour trouver les siens, comment les jumeaux réussissaient-ils à en calculer ? L'énigme est fascinante. Se pourrait-il que ces autistes savants aient été en possession de quelque formule secrète, laquelle aurait échappé à des générations de mathématiciens ?

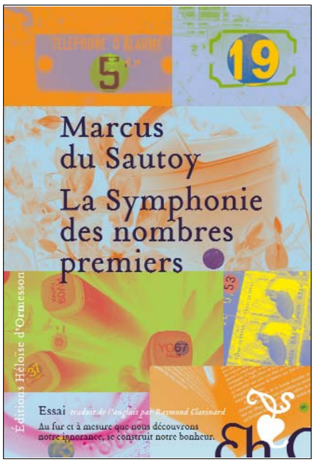
L'histoire des jumeaux est une des préférées de Bombieri.

« Quand j'entends cette histoire, je ne peux qu'être impressionné et émerveillé par les rouages du cerveau. Tout en me demandant : mes amis non mathématiciens auraient-ils la même réaction ? Voient-ils ce que le talent singulier dont jouissaient naturellement les jumeaux avait d'étrange, de prodigieux, comme issu d'un autre monde ? Savent-ils que les mathématiciens se démènent depuis des années pour trouver un moyen de faire ce que John et Michael faisaient spontanément, engendrer et reconnaître des nombres premiers ? »

Avant que quiconque ait pu comprendre comment ils procédaient, les jumeaux furent séparés à l'âge de trente-sept ans par leurs médecins, qui considéraient que leur langage numérique privé avait freiné leur développement. S'ils avaient entendu les conversations cabalistiques que l'on surprend dans les couloirs des départements de mathématiques des universités, peut-être ces médecins auraient-ils ordonné qu'on les fermât également.

Les jumeaux utilisaient probablement un truc fondé sur ce que l'on appelle le Petit Théorème de Fermat pour vérifier qu'un nombre est premier. Ce test est comparable à la capacité qu'ont les autistes savants de calculer rapidement que, par exemple, le 13 avril 1922 était un jeudi, exploit que les jumeaux accomplissaient souvent lors d'émissions de télévision. La réussite de ces deux tours dépend de ce que l'on appelle l'arithmétique de l'horloge ou arithmétique modulaire. Peut-être n'avaient-ils pas de formule magique pour les nombres premiers, mais leur talent n'en était pas moins extraordinaire. Avant leur séparation, ils avaient atteint les nombres à vingt chiffres, bien au-delà de la limite supérieure de la table de Sacks.

Comme l'héroïne de Carl Sagan écoutant le battement de cœur cosmique des nombres premiers, comme Sacks entendant par hasard les jumeaux, pendant des siècles, les mathématiciens ont tendu l'oreille en quête de quelque ordre dans ce bruit. Comme des oreilles occidentales écoutant la musique orientale, rien, apparemment, n'était identifiable. Puis, vers le milieu du XIXe siècle, il y eut une formidable percée. Bernhard Riemann entreprit de s'attaquer au problème sous un angle résolument nouveau. Avec cette nouvelle vision des choses, il commença à comprendre en partie ce qui régissait le chaos des nombres premiers. Sous-tendant le tintamarre extérieur, se trouvait une harmonie subtile, inattendue. En dépit de ce grand pas en avant, la nouvelle musique conservait l'essentiel de ses mystères. Ce qui ne suffit pas à décourager Riemann, le Wagner du monde mathématique. Téméraire, il se livra à une prédiction sur la musique énigmatique qu'il avait dévoilée. C'est cette prédiction que l'on connaît aujourd'hui sous le nom d'Hypothèse de Riemann. Et quiconque parviendra à prouver que l'intuition de Riemann quant à la nature de cette musique était juste aura alors expliqué pourquoi les nombres premiers donnent cette impression si convaincante d'être seuls jouets du hasard. (…)



Marcus du Sautoy, *La Symphonie des nombres premiers*
Essai *traduit de l'anglais par Raymond Clarinard*

ISBN 2-35087-011-1 | 496 pages | 26 € | Diffusion Interforum