Fabien Vinsu

1re

Spécialité Mathématiques

Incontournables, classiques, approfondissements :
33 exercices progressifs corrigés et commentés

ellipses

CHAPITRE 1

FONCTIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Les exercices de ce chapitre sont construits principalement autour des notions suivantes :

- Recherche des racines d'un polynôme du second degré
- Résolution d'une inéquation du second degré
- Factorisation d'un polynôme
- Recherche d'un extremum

Dans le premier exercice, on écrit une fonction polynôme du second degré sous trois formes différentes : la forme développée, la forme factorisée et la forme canonique.

Le deuxième exercice est l'occasion d'utiliser « l'artillerie lourde ». On applique ici les formules du discriminant et des racines d'un polynôme du second degré.

On s'intéresse enfin à un polynôme du troisième degré. Il s'agit alors de commencer par factoriser l'expression afin de se ramener au second degré.

1.1 Plusieurs expressions d'une fonction

Énoncé

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

1. **Quelques images**

   Calculer $f(0)$, $f(4)$ et $f(-3)$.

2. **Forme factorisée**

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$f(x) = (x+1)(x-3)$$

   (b) Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.

   (c) En utilisant un tableau de signes, résoudre sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) > 0$.

3. **Forme canonique**

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$f(x) = (x-1)^2 - 4$$

   (b) En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$. En quelle valeur ce minimum est-il atteint ? Quelle est la valeur de ce minimum ?

Correction

1. On a :
   - $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 3 = -3$
   - $f(4) = 4^2 - 2 \times 4 - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$
   - $f(-3) = (-3)^2 - 2 \times (-3) - 3 = 9 + 6 - 3 = 12$

   Soit :

   $$\boxed{f(0) = -3} \qquad \boxed{f(4) = 5} \qquad \boxed{f(-3) = 12}$$

2.(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(x+1)(x-3) &= x^2 - 3x + x - 3 \\ &= x^2 - 2x - 3 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = (x+1)(x-3)}$$

(b) On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Longleftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x+1 = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \quad \textit{(règle du produit nul)} \\ &\Longleftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1\,;\,3\}}$$

(c) On construit le tableau de signes de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est :

$$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]3\,;\,+\infty[}$$

3.(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 4 &= x^2 - 2x + 1 - 4 \\ &= x^2 - 2x - 3 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = (x-1)^2 - 4}$$

(b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^2 \geqslant 0$ (car c'est un carré) donc :

$$f(x) \geqslant -4$$

Et comme $f(1) = -4$, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ admet un minimum en 1 et ce minimum vaut } -4}$$

Commentaires

- Voici la courbe représentative $\mathscr{C}$, de la fonction f :

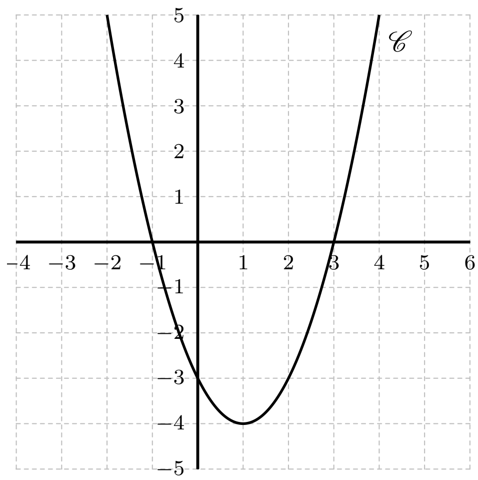

FIGURE 1.1 – Courbe de la fonction $x \mapsto x^2 - 2x - 3$

- Lorsque l'on doit déterminer une autre expression d'une fonction (questions 2a et 3a), si la réponse est donnée dans l'énoncé, il est souvent plus simple de partir de cette expression et de montrer que l'on retrouve bien $f(x)$. Dans ce cas, il faut bien faire attention à ne pas commencer le calcul par « $f(x) = \ldots$ » car on veut justement montrer que cette quantité est égale à $f(x)$.
- Dans la question 3a, la forme canonique est donnée dans l'énoncé, il est donc plus simple de partir de cette expression pour montrer l'égalité. On aurait pu trouver nous même cette expression en remarquant que $x^2 - 2x$ est le début du développement d'une identité remarquable de la forme $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. En effet, x joue le rôle de a, $2x$ celui du double produit $2ab$ et par conséquent b doit être égal à 1. On peut alors écrire :

$$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4$$

  On reviendra sur cette méthode dans l'exercice suivant.
- Lorsque l'on doit déterminer un minimum ou un maximum (question 3b), il ne faut pas confondre la valeur en laquelle cet extremum est atteint (en abscisse) et la valeur de cet extremum (en ordonnée).

1.2 Avec les formules

Énoncé

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = -2x^2 + 20x - 42$$

1. (a) Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.
   (b) En déduire une factorisation de $f(x)$.
2. (a) Construire le tableau de signes de la fonction f.
   (b) Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.
   (c) Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) > 0$.
3. (a) Écrire $f(x)$ sous forme canonique.
   (b) En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$. En quelle valeur ce maximum est-il atteint ? Quelle est la valeur de ce maximum ?

Correction

1. (a) Il s'agit d'une équation du second degré, on calcule le discriminant :

$$\Delta = 20^2 - 4 \times (-2) \times (-42) = 400 - 336 = 64$$

Le discriminant étant strictement positif, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-20 - \sqrt{64}}{2 \times (-2)} = \frac{-20 - 8}{-4} = \frac{-28}{-4} = 7 \qquad x_2 = \frac{-20 + \sqrt{64}}{2 \times (-2)} = \frac{-20 + 8}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{3\,;\,7\}}$$

(b) On en déduit la factorisation, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = -2(x-3)(x-7)}$$

2.(a) La fonction f est une fonction polynôme du second degré qui admet deux racines distinctes, elle est donc négative (signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle des racines. On a donc le tableau :

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(b) On déduit du tableau de signes, que l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ admet pour ensemble solution :

$$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,3] \cup [7\,;\,+\infty[}$$

(c) On déduit du tableau de signes, que l'inéquation $f(x) > 0$ admet pour ensemble solution :

$$\boxed{\mathscr{S} =]3\,;\,7[}$$

3.(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 20x - 42 \\ &= -2\left(x^2 - 10x + 21\right) \\ &= -2\left[(x-5)^2 - 25 + 21\right] \\ &= -2\left[(x-5)^2 - 4\right] \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f(x) = -2\left[(x-5)^2 - 4\right]} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{f(x) = -2\,(x-5)^2 + 8}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x-5)^2 \geqslant 0$ (car c'est un carré). On a alors $-2\,(x-5)^2 \leqslant 0$ et donc :

$$f(x) \leqslant 8$$

Et comme $f(5) = 8$, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ admet un maximum en 5 et ce maximum vaut 8}}$$

Commentaires

- Voici la courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f :

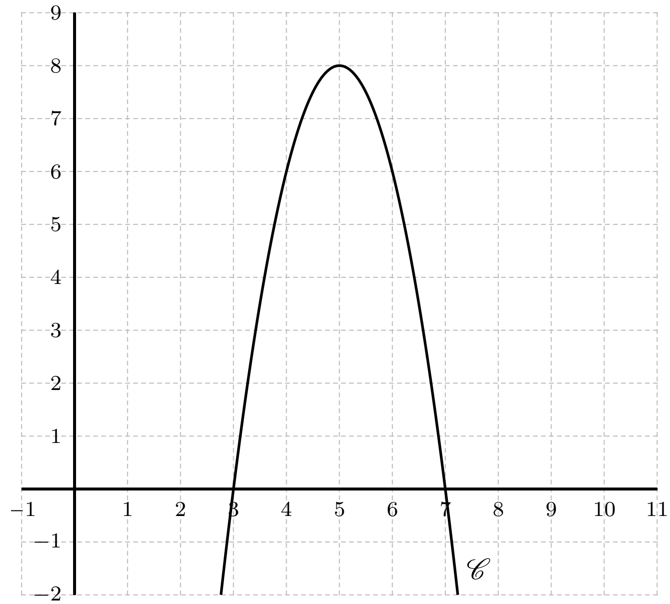

FIGURE 1.2 – Courbe de la fonction $x \mapsto -2x^2 + 20x - 42$

- Pour résoudre une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, on commence par calculer le discriminant :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

On distingue alors les cas suivants :

→ Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

→ Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution :

$$\boxed{x_0 = \frac{-b}{2a}}$$

→ Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet aucune solution réelle.

- Afin d'étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$, il faut retenir qu'elle est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle des racines. On pourra se référer à l'annexe A pour voir les 6 cas possibles.
- Lorsqu'une fonction polynôme du second degré f de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines ou une unique racine alors on peut factoriser de la façon suivante :

  → Si la fonction admet deux racines réelles x_1 et x_2 alors on a :

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

  → Si la fonction admet une unique racine réelle x_0 alors on a :

$$\boxed{f(x) = a(x - x_0)^2}$$

  On dit que x_0 est une racine « double ».
- Dans le cas où f admet deux racines x_1 et x_2, en repartant de la forme factorisée, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a(x^2 - x \times x_2 - x_1 \times x + x_1 \times x_2) \\ &= a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \end{aligned}$$

  On a donc l'égalité, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

  On obtient alors, par identification des coefficients :

$$b = -a(x_1 + x_2) \quad \text{et} \quad c = ax_1x_2$$

  Ce qui permet d'obtenir une expression de la somme et du produit des racines :

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_1x_2 = \frac{c}{a}}$$

  On pourra, en particulier, utiliser la formule donnant le produit des racines pour déterminer la deuxième racine lorsque l'on en connaît une.